

# Arrêt optimal pour les processus de Markov forts et les fonctions affines

Diana DOROBANTU\*

## Résumé

Dans cette Note nous étudions des problèmes d'arrêt optimal pour des processus de Markov forts et des fonctions affines. Nous donnons une justification de la forme de l'enveloppe de Snell en utilisant les résultats classiques d'arrêt optimal. Nous justifions également la convexité de la fonction valeur et sans nous restreindre a priori à une classe particulière de temps d'arrêt, nous en déduisons que le plus petit temps d'arrêt optimal est nécessairement un temps d'atteinte.

## Abstract

### Optimal stopping for strong Markov processes and affine functions

In this Note we study optimal stopping problems for strong Markov processes and affine functions. We give a justification of the Snell envelope form using standard results of optimal stopping. We also justify the convexity of the value function, and without a priori restriction to a particular class of stopping times, we deduce that the smallest optimal stopping time is necessarily a hitting time.

## Abridged English version

We choose to solve a particular optimal stopping problem for strong Markov processes. Without a priori restriction to a particular class of stopping times, we propose a method to find the optimal stopping time form (it will be a hitting time).

In fact we seek to control a stochastic process  $V$  of the form  $V = ve^X$  where  $v$  is a real strictly positive constant and  $X$  a strong Markov process such that  $X_0 = 0$ . We consider the following optimal stopping problem :

$$J_t = \operatorname{esssup}_{\tau \in \Delta, \tau \geq t} \mathbb{E} \left( e^{-r\tau} f(V_\tau) \mid \mathcal{F}_t^V \right),$$

where  $r > 0$ ,  $\mathcal{F}_t^V = \sigma(V_s, s \leq t)$ ,  $\Delta$  is the set of  $\mathcal{F}_t^V$ -stopping times and  $f$  is a decreasing affine function.

---

\*Laboratoire de Statistique et Probabilités à l'Université Toulouse 3, dorobant@cict.fr

We suppose that the process  $X$  checks the following assumptions :

**H1** :  $\mathbb{P}(\lim_{t \downarrow 0} X_t = X_0) = 1$ .

**H2** : The process  $(e^{-rt+X_t}, t \geq 0)$  is of class  $D$ .

**H3** :  $\inf_{t \geq 0} e^{-rt} \mathbb{E}(e^{X_t}) = 0$ .

**H4** : The support of  $X_t$  is  $\mathbb{R}$  for all  $t > 0$ .

We seek a stopping time  $\tau^*$  which maximizes  $\tau \mapsto \mathbb{E}(Y_\tau \mid \mathcal{F}_t^V)$  where the process  $Y$  has the form

$t \mapsto Y_t = e^{-rt} f(V_t)$ . In many papers the optimal stopping time is supposed from the beginning to be a hitting time, here we show that the optimal stopping time is necessarily of the form  $\inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ . Under Assumptions  $H1 - H4$ , we give a justification of the form of the Snell envelope of the process  $Y$  using standard results of optimal stopping of [4] :  $J$  has the form  $t \mapsto J_t = e^{-rt} s(V_t)$  where the function  $s$  is called "r-reduite" of  $f$ . We also argue the convexity of the function  $s$ . Using a result of optimal stopping of [8], the smallest optimal stopping time has the form

$$\tau^* = \inf\{u : f(V_u) = s(V_u)\}.$$

The main result is given by Theorem 2.1 which allows to deduce from the convexity of  $s$ , that  $\tau^*$  is necessarily a hitting time.

## 1 Introduction

Nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  sur lequel nous considérons  $V$  un processus stochastique s'écrivant sous la forme

$$V = ve^X$$

où  $v$  est une constante réelle strictement positive et  $X$  est un processus de Markov fort tel que  $X_0 = 0$ . Afin d'enlever l'ambiguïté, nous utiliserons parfois la notation  $V^v = ve^X$ , pour tout  $v > 0$ .

Dans la suite  $\mathbb{E}(\cdot \mid V_0 = v)$  et  $\mathbb{P}(\cdot \mid V_0 = v)$  sont notés  $\mathbb{E}_v(\cdot)$  et  $\mathbb{P}_v(\cdot)$ .

Nous introduisons  $\mathcal{F}^V$  la filtration complétée càd, engendrée par le processus  $V$ ,  $\mathcal{F}_t^V = \sigma(V_s, s \leq t)$  et nous considérons le problème d'arrêt optimal suivant :

$$J_t = \text{esssup}_{\tau \in \Delta, \tau \geq t} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(V_\tau) \mid \mathcal{F}_t^V), \quad (1)$$

où  $r > 0$ ,  $\Delta$  est l'ensemble des  $\mathcal{F}^V$ -temps d'arrêt et  $f$  est une fonction affine décroissante de la forme  $f(v) = -\alpha v + c$  où  $\alpha > 0$ ,  $c > 0$ .

**Definition 1.1** *Le temps d'arrêt  $\tau_t^*$  est optimal s'il maximise (1), c'est à dire*

$$\mathbb{E}(e^{-r\tau_t^*} f(V_{\tau_t^*}) \mid \mathcal{F}_t^V) = \text{esssup}_{\tau \in \Delta, \tau \geq t} \mathbb{E}(e^{-r\tau} f(V_\tau) \mid \mathcal{F}_t^V).$$

Nous supposons que le processus  $X$  vérifie les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1.2**  $\mathbb{P}(\lim_{t \downarrow 0} X_t = X_0) = 1$ .

**Hypothèse 1.3** Le processus  $(e^{-rt+X_t}, t \geq 0)$  est de classe  $D$ .

**Hypothèse 1.4**  $\inf_{t \geq 0} e^{-rt} \mathbb{E}(e^{X_t}) = 0$ .

**Hypothèse 1.5** Le support de la loi de  $X_t$  est  $\mathbb{R}$  pour tout  $t > 0$ .

Dans la suite nous proposons une méthode qui permet de trouver la forme du plus petit temps d'arrêt optimal du problème (1). Nous avons appliqué cette méthode à des processus de Lévy [2, 3], mais cela s'étend à des processus plus généraux.

## 2 Le temps d'arrêt optimal

Dans cette partie nous montrons que le problème (1) admet au moins un temps d'arrêt optimal et que le plus petit temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte.

Sous l'hypothèse 1.3, le processus  $(t \mapsto e^{-rt} f(V_t), t \geq 0)$  est de classe  $D$ . D'après le théorème 3.4 de [4], l'enveloppe de Snell  $J$  du processus  $Y$  est de la forme  $(e^{-rt} s(V_t))_{t \geq 0}$ . De plus, comme le support de  $V_t$  est  $\mathbb{R}_+^*$  (c'est une conséquence directe de l'hypothèse 1.5), alors la définition (1) prise en  $t = 0$  donne  $J_0 = s(v)$ . Il suffit donc de regarder le problème en  $t = 0$

$$s(v) = \sup_{\tau \in \Delta} \mathbb{E}_v(e^{-r\tau} f(V_\tau)). \quad (2)$$

**Théorème 2.1** *Sous les hypothèses 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5, il existe au moins un temps d'arrêt optimal pour le problème (2).*

*Pour tout  $c > 0$ , il existe  $b_c > 0$  tel que le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme*

$$\tau_{b_c} = \inf\{t \geq 0 : V_t \leq b_c\}.$$

La démonstration de ce théorème nécessite plusieurs résultats.

La fonction  $s$  est une fonction convexe (décroissante) car c'est le sup de fonctions affines (décroissantes) :

$$s(v) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v[e^{-r\tau}(-\alpha V_\tau + c)] = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_1[e^{-r\tau}(-\alpha v V_\tau^1 + c)].$$

**Remarque 2.2** *La fonction  $s$  étant convexe, elle est donc continue.*

Remarquons que  $s$  est une fonction positive puisque

$$s(v) \geq \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}_v[e^{-rt}(-\alpha V_t + c)] \geq \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}_v[-e^{-rt}\alpha V_t] = \sup_{t \geq 0} -\alpha v \mathbb{E}[e^{-rt+X_t}] = 0,$$

où pour la dernière égalité nous avons utilisé l'hypothèse 1.4.

Le théorème 3.3 page 127 de [8], permet de trouver le temps d'arrêt optimal d'un problème du type  $\sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v [f(V_\tau)]$  où  $f$  est une fonction mesurable. En généralisant ce résultat, nous en déduisons facilement que le théorème 3.3 page 127 de [8] peut être appliqué à des processus de la forme  $t \mapsto e^{-rt} f(V_t)$ . Nous ne pouvons pas appliquer directement ce résultat pour le problème (2) puisque le processus  $t \mapsto e^{-rt} f(V_t)$  ne vérifie pas les hypothèses du théorème ; par conséquent nous sommes obligés de réécrire la fonction  $s$  sous une autre forme.

**Lemme 2.3** *Soit pour  $v > 0$*

$$s(v) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v [e^{-r\tau} (-\alpha V_\tau + c)] \quad \text{et} \quad s^+(v) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v [e^{-r\tau} (-\alpha V_\tau + c)^+],$$

où  $x^+ = \max(x, 0)$ . Sous les hypothèses 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5  $s^+(v) > 0$  et  $s(v) = s^+(v)$  pour tout  $v > 0$ .

**Preuve** Nous montrons que s'il existe  $v_0 > 0$  tel que  $s(v_0) < s^+(v_0)$ , alors il existe  $v_1 > 0$  tel que  $s^+(v_1) = 0$ . Nous montrons ensuite, que cette dernière relation ne peut pas être satisfaite.

Par construction, pour tout  $v > 0$ ,  $s(v) \leq s^+(v)$ . Supposons qu'il existe  $v_0 > 0$  tel que  $s(v_0) < s^+(v_0)$ .

Sous l'hypothèse 1.2, le processus  $V$  est continu à droite en 0, le processus  $t \rightarrow Y_t^+ = e^{-rt} (-\alpha V_t + c)^+$  est à valeurs dans  $[0, c]$ , alors les hypothèses du théorème 3.3 page 127 de [8] sont vérifiées pour  $Y^+$ . On note  $f^+(v) = (-\alpha v + c)^+$  ; le temps d'arrêt

$$\tau^+ = \inf\{u \geq 0 : f^+(V_u^{v_0}) = s^+(V_u^{v_0})\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal du problème

$$s^+(v_0) = \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_{v_0} [e^{-r\tau} (-\alpha V_\tau + c)^+].$$

D'après la définition de  $s$  et  $s^+$  :

$$\mathbb{E}_{v_0} [e^{-r\tau^+} f(V_{\tau^+})] \leq s(v_0) < s^+(v_0) = \mathbb{E}_{v_0} [e^{-r\tau^+} f^+(V_{\tau^+})]$$

et par suite

$$\mathbb{E}_{v_0} [e^{-r\tau^+} (f(V_{\tau^+}) - f^+(V_{\tau^+}))] < 0, \quad \mathbb{P}_{v_0}(\{\omega : f(V_{\tau^+}) < 0\}) > 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{v_0}(\{\omega : s^+(V_{\tau^+}) = 0\}) > 0.$$

Donc il existe  $v_1$  tel que  $s^+(v_1) = 0$ . Alors pour tout temps d'arrêt  $\tau$ ,  $\mathbb{P}_{v_1}$ -presque sûrement  $e^{-r\tau} f^+(V_\tau) = 0$  et en particulier pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $f^+(V_t) = 0$ . Ceci entraîne que  $\mathbb{P}_{v_1}$ -presque sûrement  $V_t \geq \frac{c}{\alpha}$  d'où la contradiction puisque sous l'hypothèse 1.5, la loi de  $V_t$  a pour support  $\mathbb{R}_+^*$ . Donc  $s^+(v) > 0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}_+^*$  et  $s(v) = s^+(v)$ .  $\square$

D'après le lemme 2.3, le problème (2) se ramène à un problème d'arrêt optimal pour une option Put américaine. Un tel problème a été étudié par plusieurs auteurs quand  $X$  est un processus

de Lévy (voir par exemple [1, 5, 6, 7]). Dans la suite, nous utilisons un raisonnement proche de celui utilisé par Pham [7]. Il se place dans un cadre plus restreint que le nôtre et étudie un problème d'arrêt optimal à horizon fini pour une option Put américaine quand  $X$  est un processus de Lévy.

**Preuve** (du théorème 2.1)

D'après le lemme 2.3, le problème (2) peut se réécrire sous la forme  $\sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}(Y_\tau^+)$ . Les hypothèses du théorème 3.3 page 127 de [8] sont vérifiées et le temps d'arrêt

$$\tau^* = \inf\{u \geq 0 : f^+(V_u) = s^+(V_u)\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal. Or  $s(v) = s^+(v) > 0$  pour tout  $v > 0$ , d'où

$$\tau^* = \inf\{u \geq 0 : f(V_u) = s(V_u)\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal. La fonction  $s$  est majorée par  $c$  puisque  $Y_\tau^+$  est majoré par  $c$  et  $\lim_{v \downarrow 0} s(v) = \lim_{v \downarrow 0} f(v) = c$ .

La fonction  $s$  étant convexe et  $f$  une fonction affine, alors  $\inf\{v > 0 : f(v) < s(v)\}$  est égal à

$\sup\{v > 0 : f(v) = s(v)\}$ , que l'on note  $b_c$ . En effet, soit  $b'_c = \sup\{v : f(v) = s(v)\}$  et  $b_c = \inf\{v : f(v) < s(v)\}$ . Comme  $\lim_{v \downarrow 0} s(v) = \lim_{v \downarrow 0} f(v)$ , alors  $b'_c$  existe et  $b'_c \geq 0$ . Si  $b_c = 0$ , alors  $b'_c = 0$ .

Si  $b_c > 0$ , alors pour tout  $v < b_c$ ,  $f(v) = s(v)$ ; en particulier  $f(b_c - \frac{1}{n}) = s(b_c - \frac{1}{n})$ . En faisant tendre  $n$  vers l'infini, comme  $s$  et  $f$  sont continues, alors  $f(b_c) = s(b_c)$ , d'où  $b_c \leq b'_c$ . Supposons par l'absurde que  $b_c < b'_c$ , alors il existe  $v$ ,  $b_c < v < b'_c$  tel que  $f(v) < s(v)$ . Or  $s$  est convexe, donc d'après le lemme des trois cordes :

$$\frac{s(v) - s(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{s(b'_c) - s(v)}{b'_c - v}.$$

Comme, par continuité,  $f(b'_c) = s(b'_c)$ , alors

$$\frac{s(v) - f(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{f(b'_c) - s(v)}{b'_c - v}.$$

Comme  $s(v) > f(v)$ , alors

$$\frac{f(v) - f(b_c)}{v - b_c} < \frac{s(v) - f(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{f(b'_c) - s(v)}{b'_c - v} < \frac{f(b'_c) - f(v)}{b'_c - v},$$

d'où la contradiction puisque, comme  $f$  est affine, alors  $\frac{f(v) - f(b_c)}{v - b_c} = \frac{f(b'_c) - f(v)}{b'_c - v} = -\alpha$ . Donc  $b_c = b'_c$ .

Ceci signifie que le plus petit temps d'arrêt optimal  $\tau^*$  est aussi le premier temps de passage dans l'intervalle  $]0, b_c]$ .  $\square$

**Remarque 2.4** *Le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (1) est de la forme*

$$\inf\{u \geq t : V_u \leq b_c\}.$$

Soit  $\tau_x = \inf\{u \geq t : X_u \leq x\}$ . Lorsque les transformées de Laplace de  $\tau_x$  et de  $(\tau_x, X_{\tau_x})$  sont connues, le seuil optimal peut être calculé explicitement [2, 3].

## Références

- [1] S. Boyarchenko, S. Levendorskii, "Perpetual American options under Lévy processes", SIAM J. Control Optim., 40, 2002, pp. 1663-1696.
- [2] D. Dorobantu, "Modélisation du risque de défaut en entreprise", thèse, Université Toulouse III, 2007.
- [3] D. Dorobantu, "Optimal stopping for Lévy processes and affine functions", preprint, 2008.
- [4] N. El Karoui, J.-P. Lepeltier, A. Millet, "A probabilistic approach of the reduite", Probab. Math. Statist. 13, no 1, 1992, pp. 97-121.
- [5] A. E. Kyprianou, "Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [6] E. Mordecki, "Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes", Finance Stoch., 6, 1999, pp. 473-493.
- [7] H. Pham, "Optimal Stopping, Free Boundary and American Option in a Jump Diffusion Model", Applied Mathematics and Optimization, 35, 1997, pp. 145-164.
- [8] A.N. Shiryaev, "Optimal Stopping Rules", Springer-Verlag, New-York, 1978.